Nyní se podívejme na další zajímavou vlastnost kružnice, která se týká jejích tětiv, a to – v českém překladu – na tzv. Větu o motýlovi. Název věty se zrodil na základě útvaru vzniklého ve vnitřní oblasti kružnice, jenž svým tvarem motýla připomíná.

Tato kapitola je zpracována na základě textů [2], [5], [13], [23] a [25].

Existuje více syntetických důkazů Věty o motýlovi, my se nyní zaměříme pouze na některé z nich. Pro důkazy budeme potřebovat pojem tětivový čtyřúhelník[2]. Připomeňme, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když:

- Existuje kružnice tomuto čtyřúhelníku opsaná.
- Součet velikostí protějších vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABCD$ je roven 180°.
- Jedna ze stran čtyřúhelníku $ABCD$ je vidět pod stejným úhlem ze dvou jeho vrcholů, které nejsou krajními body uvažované strany.

Dále využijeme i Cevovu větu, která byla zformulována a dokázána v druhé kapitole. Zopakujeme, že pro daný trojúhelník ABC a body D, E, F, které leží na stranách daného trojúhelníku tak, že D je vnitřním bodem strany BC, E je vnitřním bodem strany AC a F je vnitřním bodem strany AB, platí, že přímky AD, BE, CF se protínají v jediném bodě právě tehdy, když

$$|AF| \cdot |BD| \cdot |CE| = |FB| \cdot |DC| \cdot |EA|,$$

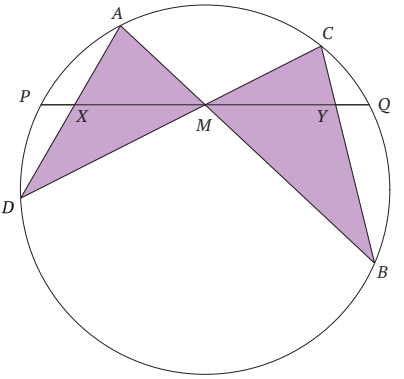
tj. když

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1. \tag{4.1}$$

2 Více informací o tětivovém čtyřúhelníku např. v [15].

Věta 9 (Věta o motýlovi). *Mějme dánu kružnici k a dva různé body P, Q, které na ní leží (viz obrázek 4.1). Sestrojme střed M úsečky PQ a dále dvě libovolné, navzájem různé sečny kružnice procházející bodem M tak, aby nebyly incidentní s přímkou PQ. Průsečíky jedné z těchto sečen s kružnicí k označme A, B, průsečíky druhé sečny s kružnicí k označme C, D. Body A, C přitom leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou PQ. Označíme-li X, resp. Y průsečík úsečky AD, resp. CB s úsečkou PQ, pak je bod M též středem úsečky XY, tj. $|XM| = |MY|$.*

Obrázek 4.1 Ilustrace Věty 9
Grafika: Klára Nováková



Důkaz. Bodem X vedeme rovnoběžku s úsečkou PC (viz obrázek 4.2). Průsečík této rovnoběžky s úsečkou CD označme R a dále průsečík úseček CB, RQ označme S. Následující rovnosti jsou zřejmé:

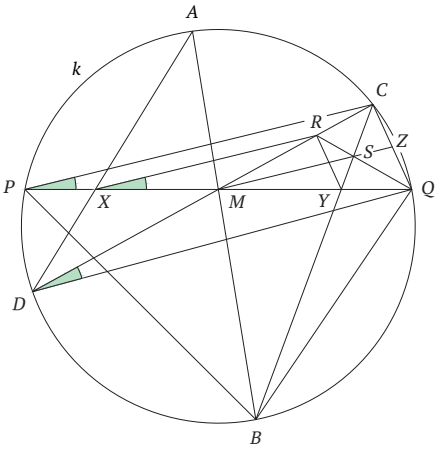
$$|\sphericalangle RXQ| = |\sphericalangle CPQ|, \tag{4.2}$$

$$|\sphericalangle CDQ| = |\sphericalangle RDQ|. \tag{4.3}$$

Úhly CPQ a CDQ jsou shodné, neboť jsou obvodovými úhly příslušnými témuž kružnicovému oblouku CQ, a tedy z rovností (4.2), (4.3) získáváme

$$|\sphericalangle RXQ| = |\sphericalangle RDQ|. \tag{4.4}$$

Obrázek 4.2 Ilustrace první části prvního důkazu Věty 9
Grafika: Klára Nováková



Z rovnosti (4.4) vyplývá, že čtyřúhelník $DQRX$ je tětivový, a lze mu tedy opsat kružnici m (viz obrázek 4.3). Z vlastností obvodových úhlů a triviálních geometrických vlastností dále získáváme

$$|\sphericalangle SQM| = |\sphericalangle RQX| = |\sphericalangle RDX| = |\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle SBM|.$$

Čtyřúhelník $BQSM$ je proto též tětivový a lze mu opsat kružnici l. Tudíž

$$|\sphericalangle SMQ| = |\sphericalangle SBQ|.$$

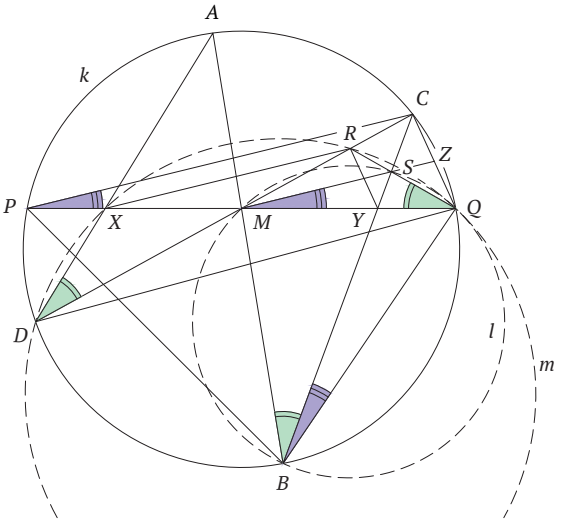
Dále je zřejmé, že

$$|\sphericalangle SBQ| = |\sphericalangle CBQ| = |\sphericalangle CPQ|,$$

neboť CBQ a CPQ jsou obvodové úhly příslušné témuž kružnicovému oblouku CQ.

Platí tedy $|\sphericalangle SMQ| = |\sphericalangle CPQ|$, z čehož plyne, že úsečka PC je rovnoběžná s úsečkou MS. Úsečka MZ , kde Z je průsečík přímek MS a CQ, je proto střední příčkou trojúhelníku PQC.

Obrázek 4.3 Ilustrace druhé části prvního důkazu Věty 9
Grafika: Klára Nováková



Bodem S procházejí úsečky QR, CY a MZ, proto lze pro trojúhelník MQC vyjádřit rovnosti analogické vztahům (4.1):

$$\frac{|MY|}{|YQ|} \cdot \frac{|QZ|}{|ZC|} \cdot \frac{|CR|}{|RM|} = 1. \tag{4.5}$$

Z vlastností středních příček dále plyne

$$\frac{|QZ|}{|ZC|} = 1. \tag{4.6}$$

Dosazením rovnosti (4.6) do rovnosti (4.5) získáváme

$$\frac{|MY|}{|YQ|} \cdot \frac{|CR|}{|RM|} = 1.$$

Tudíž

$$\frac{|MY|}{|MR|} = \frac{|YQ|}{|RC|}$$

a trojúhelníky MYR, MQC jsou podobné. Z toho plyne, že rovněž

$$\frac{|MQ|}{|MY|} = \frac{|MC|}{|MR|}. \tag{4.7}$$

Z podobnosti trojúhelníků PMC a XMR dostáváme

$$\frac{|MC|}{|MR|} = \frac{|MP|}{|MX|}. \tag{4.8}$$

Ze vztahů (4.7), (4.8) získáváme rovnost

$$\frac{|MQ|}{|MY|} = \frac{|MP|}{|MX|}.$$

Protože $|MP| = |MQ|$, platí $|MY| = |MX|$, tj. bod M je skutečně středem úsečky XY.

Důkaz. Bodem Y veďme rovnoběžku s přímkou AD a její průsečíky s přímkami MC a MB označme po řadě F a E (viz obrázek 4.4). Z rovnoběžnosti přímek AD, EF vyplývá shodnost úhlů CFE a CDA. Úhly CDA a CBA jsou též shodné, neboť jsou to obvodové úhly příslušné témuž kružnicovému oblouku AC. Tedy i úhly CFE a CBE jsou shodné, a proto body F, C, E, B leží na jedné kružnici, kterou označíme l. Protože jsou úhly EYB, CYF vrcholové, jsou shodné. Trojúhelníky EBY, CFY jsou tudíž podobné, a proto

$$\frac{|EY|}{|BY|} = \frac{|CY|}{|FY|}.$$

Odtud plyne

$$|EY| \cdot |FY| = |BY| \cdot |CY|. \tag{4.9}$$

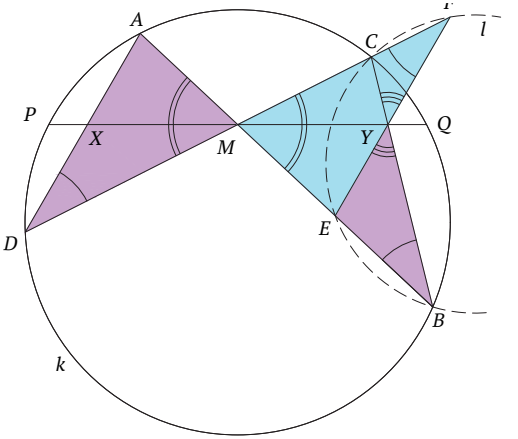
Vztah platí obecně pro libovolnou kružnici a její tětivy EF, BC protínající se v bodě Y. Tuto vlastnost tětiv použijeme v důkazu i dále.[3]

Trojúhelníky MAD a MEF jsou podobné, neboť vrcholové úhly DMA a FME jsou shodné. Strany AD a EF uvedených trojúhelníků jsou body X a Y rozděleny ve stejném poměru. Proto jsou podobné i trojúhelníky MAX a MEY a také trojúhelníky MXD a MYF. Získáváme tedy vztahy

$$\frac{|XM|}{|AX|} = \frac{|YM|}{|EY|},$$

3 Vztah zůstává v platnosti i v případě, že sečny EF, BC se protínají v bodě Y, který leží ve vnější oblasti kružnice. Konstantní součin $|EY| \cdot |FY| = |BY| \cdot |CY|$ úseků na tětivách (sečnách) je roven tzv. *mocnosti bodu Y ke kružnici*.

Obrázek 4.4 Ilustrace druhého důkazu Věty 9
Grafika: Klára Nováková



$$\frac{|XM|}{|DX|} = \frac{|YM|}{|FY|},$$

a tudíž

$$\frac{|XM|^2}{|AX| \cdot |DX|} = \frac{|YM|^2}{|EY| \cdot |FY|}. \tag{4.10}$$

Z vlastností dvojic tětiv BC, PQ, resp. AD, PQ kružnice k procházející týmž bodem Y, resp. X dále vyplývá, že

$$|BY| \cdot |CY| = |PY| \cdot |QY|, \tag{4.11}$$

$$|AX| \cdot |DX| = |PX| \cdot |QX|. \tag{4.12}$$

Z rovností (4.9) a (4.11) plyne

$$|EY| \cdot |YF| = |PY| \cdot |YQ|. \tag{4.13}$$

Dosazením vztahů (4.12), (4.13) do rovnosti (4.10) dostáváme rovnost

$$\frac{|XM|^2}{|PX| \cdot |QX|} = \frac{|YM|^2}{|PY| \cdot |YQ|},$$

kterou dále upravíme:

$$|XM|^2 \cdot |PY| \cdot |YQ| = |YM|^2 \cdot |PX| \cdot |QX|,$$

$$|XM|^2 \cdot |YM|^2 + |XM|^2 \cdot |PY| \cdot |YQ| = |XM|^2 \cdot |YM|^2 + |YM|^2 \cdot |PX| \cdot |QX|,$$

$$|XM|^2 \cdot (|YM|^2 + |PY| \cdot |YQ|) = |YM|^2 \cdot (|XM|^2 + |PX| \cdot |QX|),$$

$$\frac{|XM|^2}{|XM|^2 + |PX| \cdot |QX|} = \frac{|YM|^2}{|YM|^2 + |PY| \cdot |YQ|}. \tag{4.14}$$

Z obrázku 4.4 je zřejmá platnost vztahu

$$|PX| + |XM| = |PM|. \tag{4.15}$$

Protože $|PM| = |MQ|$, platí zároveň

$$|PX|^2 + |PX| \cdot |XM| = |PX| \cdot |MQ|.$$

Úpravami získáváme

$$|PX|^2 + 2|PX| \cdot |XM| = |PX| \cdot |MQ| + |PX| \cdot |XM|,$$

$$|PX|^2 + 2|PX| \cdot |XM| = |PX| \cdot (|MQ| + |XM|),$$

$$|PX|^2 + 2|PX| \cdot |XM| = |PX| \cdot |QX|. \tag{4.16}$$

Dále umocněním obou stran rovnosti (4.15) dostáváme

$$|PM|^2 = (|PX| + |XM|)^2,$$

$$|PM|^2 = |PX|^2 + 2|PX| \cdot |XM| + |XM|^2,$$

$$|PX|^2 + 2|PX| \cdot |XM| = |PM|^2 - |XM|^2. \tag{4.17}$$

Ze vztahů (4.16) a (4.17) vyplývá rovnost

$$|PM|^2 - |XM|^2 = |PX| \cdot |QX|$$

a následně

$$|PM|^2 = |XM|^2 + |PX| \cdot |QX|. \tag{4.18}$$

Analogickým způsobem lze získat vztah

$$|QM|^2 = |YM|^2 + |PY| \cdot |YQ|. \tag{4.19}$$

Dosazením vztahů (4.18), (4.19) do rovnosti (4.14) dostáváme

$$\frac{|XM|^2}{|PM|^2} = \frac{|YM|^2}{|QM|^2}.$$

Délky úseček jsou pouze nezáporná čísla, rovnost proto můžeme přepsat bez druhých mocnin:

$$\frac{|XM|}{|PM|} = \frac{|YM|}{|QM|}.$$

Je tedy zřejmé, že úsečka PM je bodem X rozdělena ve stejném poměru jako úsečka QM bodem Y, a tedy také platí

$$\frac{|XM|}{|YM|} = \frac{|PM|}{|QM|}.$$

Protože jsou stejně dlouhé úsečky PM a QM , jsou stejně dlouhé i úsečky XM a MY. Bod M je tudíž středem úsečky XY.